Elementaire Meetkunde
aanvullingen en errata

Laatste update: 23 februari 2021

Hoofdstuk 7

Schrap de laatste zin voorafgaand aan stelling 7.3.22

In boeken gekocht na 8 februari2021 zijn de volgende aanvullingen en correcties al doorgevoerd.

Hoofdstuk 1

In de formulering en het bewijs van stelling 1.5.3 (*stelling van Ceva*) is geen rekening gehouden met het feit dat de lijnen *PM*, *QL* en *RK* ook evenwijding kunnen zijn (en dus a.h.w. door één "oneindig ver punt" gaan). Houden we hier wel rekening mee, dan moet de stelling als volgt luiden:

> **1.5.3** *De stelling van Ceva*. Stel *K, L* en *M* zijn drie punten op de zijden *PQ*, *QR* en *RP* van driehoek *PQR* die niet samenvallen met een hoekpunt van de driehoek. Dan zijn de lijnen *PL*, *QM* en *RK* evenwijdig of gaan door één punt precies dan, wanneer
>
> $$\frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QL}}{\overrightarrow{LR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RM}}{\overrightarrow{MP}} = 1 .$$

Ook het bewijs moet dan aangevuld worden met het geval dat *PM*, *QL* en *RK* evenwijdig zijn.

Hoofdstuk 3

Bladz. 80: Eerste alinea.Verander 3.7.2 in 3.8.1.

Hoofdstuk 13.

Bladz. 339. Tweede alinea. Vervang $\mathbb{K}$ door $\mathbb{K}^2$ in de zin "De afstand van twee punten X en Y in $\mathbb{K}$ is een construeerbaar getal. Als $X, Y \in \mathbb{K}$, dan ook $X + Y \in \mathbb{K}$ en $cX \in \mathbb{K}$, …" en in de zin "Idem bij een lijn AB in $\mathbb{K}$."

In boeken gekocht na 11 mei 2020 zijn de volgende aanvullingen en correcties al doorgevoerd.

Hoofdstuk 8

In het bewijs van 8.3.2: vervang 'uit 6.5.6 volgt …' door 'uit 7.5.6 volgt …'.

Hoofdstuk 10

De laatste regel van het bewijs van 10.3.5 moet luiden:

"Neem nu $\overline{A} = t_1\tilde{A}$, $\overline{B} = t_2\tilde{B}$, $\overline{C} = t_3\tilde{C}$ in plaats van de voorlopige representanten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$. Dan $\overline{D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$."

Bladz.281 regel 4: vervang 'volgens 15.1' door '[zie 10.4]'.

Hoofdstuk 11

De stelling bovenaan bladz. 308 heeft niet nummer **11.7.5** maar **11.7.4 versie 2**.

Vervang in de laatste zin van 11.8.1 *'vierhoek ABCP'* door *'vierhoek ABCD'*.

Hoofdstuk 12

Schrap de z in de laatste vergelijking van paragrraf 12.1.

Schrap de z in de vergelijking van lijn m door $P(p_1, p_2)$ met $\mathrm{rc} = q_2 / q_1$ in de opmerking op bldz. 320.

Hoofdstuk 13.

De tweede alinea van 13.9 moet eindigen op ' …. de gemeenschappelijke waarde van deze limieten maal $\mathrm{opp}(ABCD)$.'

Hoofdstuk 14.

In de toepassing volgend op 14.2.1 vervang de x in $f'(t) = \frac{1}{2}(r^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$ door t.

In boeken gekocht na 23 aug 2018 zijn de volgende aanvullingen en correcties al doorgevoerd.

Hoofdstuk 2.

Op bladz.34 is na 2.2.12 de volgende opgave toegevoegd:

Opgave. Stel ABC is een driehoek en P is een punt zo dat $AP \perp BC$ en $BP \perp AC$. Toon aan dat hieruit volgt dat $CP \perp AB$. Dit bewijst nogmaals dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan.

Op bladz. 41 is als tweede opgave toegevoegd:

Opgave. Toon aan dat de spiegeling F t.o.v. de lijn $A \cdot X = c$ wordt gegeven door

$$F(X) = X - \frac{2(A \cdot X)A}{|A|^2} + \frac{2cA}{|A|^2}.$$

Hoofdstuk 3.

Verander op bladz. 60 "Ook de identieke transformatie $I = \sphericalangle AOA$ …. " in
"Ook de identieke transformatie I over $\sphericalangle AOA$ …. "

Aan het eind van de laatste regel van het bewijs van 3.6.3 op bladz. 70 is weggevallen " $\angle ACB + \angle ADB = \pi$ ".
Op bladz. 73 is aan het bewijs dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan toegevoegd de regel "Dit bewijs moet een beetje aangepast worden, wanneer één van de hoeken van driehoek ABC stomp is."

Hoofdstuk 6.

Op bladz. 141 in deel (ii) van het bewijs van 6.4.1 zijn de regels die volgen op de zin "Neem nu een lijn m die niet door A, B of C gaat." als volgt geherformuleerd:

" Lijn m snijdt zijde AC in P en m snijdt BC in Q. Dan ligt $P' \neq A', C'$ op $A'C'$ en $Q' \neq B', C'$ ligt op $B'C'$. Laat ψ de perspectiviteit zijn, die de lijnenwaaier met top B afbeeldt op de lijnwaaier met top C, waarbij corresponderende lijnen elkaar snijden op lijn m. Lijn BC correspondeert hierbij met zichzelf. Dan is $\psi' = \varphi_C \circ \psi \circ \varphi_B^{-1}$ een projectiviteit die de lijnenwaaier met top B' afbeeldt op de lijnwaaier met top C', waarbij lijn $B'C'$ met zichzelf correspondeert. Met 4.5.10 volgt hieruit dat de snijpunten van de onder ψ' corresponderende lijnen op een lijn liggen. Ga na dat dit de lijn $P'Q'$ is. Ieder punt $X = BX \wedge CX$ op de lijn $m = PQ$ wordt dus door F afgebeeld op het punt $X' = \varphi_B(BX) \wedge \varphi_C(CX)$ op lijn $m' = P'Q'$. "

Hiermee is dan aangetoond dat lijn m wordt afgebeeld op lijn m'. De rest van het bewijs [dat hierbij dubbelverhoudingen behouden blijven] blijft gelijk.

In het bewijs van 6.2.1 op bladz. 145 zijn de eerste regels als volgt geherformuleerd:

" *Bewijs*. Stel $F \neq I$ is een projectieve transformatie van $\mathcal{P}$ met een waaier van invariante lijnen met top P. Punt P is dan een dekpunt van F. Van de lijnen door P is hoogstens één lijn puntsgewijs invariant. Op een lijn door P die niet puntsgewijs invariant is ligt hoogstens één dekpunt $\neq P$. Het is dus mogelijk om punten A, B en C te kiezen, die een driehoek ABC vormen, geen dekpunten van F zijn en waarbij de lijnen PA, PB en PC niet samenvallen."

Hoofdstuk 8.

Bladz. 211. De zin voorafgaand aan 8.4.3 en stelling 8.4.3 zelf is nu als volgt veranderd:

Als $|A| \neq 1$, dan gaan we over op de vergelijking $\tilde{A} \cdot X = \tilde{c}$ met $\tilde{A} = A/|A|$ en $\tilde{c} = c/|A|$ van vlak W. Dus:

8.4.3 De spiegeling t.o.v. het vlak W met vergelijking $A \cdot X = c$ wordt gegeven door

$$F(X) = X - \frac{2(A \cdot X)A}{|A|^2} + \frac{2cA}{|A|^2}.$$

Ook het voorbeeld na 8.4.3 en die tekst die erop volgt is een beetje aangepast:

Voorbeeld. De spiegeling F t.o.v. vlak $E_1E_2E_3$ met vergelijking $x + y + z = 1$ kunnen we schrijven als $F(X) = X - \dfrac{2(A \cdot X)A}{|A|^2} + \dfrac{2cA}{|A|^2}$ met $A = (1,1,1)$ en $c = 1$. Ga na dat $F(X) = S(X) + 2N$, waarin S de spiegeling t.o.v. vlak $x + y + z = 0$ is [zie het vorige voorbeeld] en $N = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Uit 8.4.3 blijkt dat we iedere spiegeling t.o.v. een vlak W in $\mathbb{R}^3$ kunnen schrijven als een spiegeling t.o.v. zijn richtingsvlak V gevolgd door een translatie in een richting loodrecht op vlak V. Omgekeerd geldt: Als S een spiegeling is t.o.v. een vlak V door O, dan is de transformatie een spiegeling t.o.v. een vlak $W \parallel V$ precies dan, wanneer $F(F(X)) = X$. Ga na dat dit het geval is, als $T + S(T) = O$ ofwel $S(T) = -T$. Dat betekent dat $OT \perp V$. Met $S(T) = -T$ krijgen we

$$F(X) = S(X) + T = S(X) + \tfrac{1}{2}(T - S(T)) + \tfrac{1}{2}(T + S(T))$$

$$= S(X) + (C - S(C)) \text{ met } C = \tfrac{1}{2}T.$$

Als $S(T) \neq -T$, dan is F niet een spiegeling. De spiegeling $S(X) + \frac{1}{2}(T - S(T))$ wordt dan gevolgd door de translatie $X \mapsto X + \frac{1}{2}(T + S(T))$. Ga na dat

$$(T - S(T)) \cdot (T + S(T)) = 0.$$

Dus $X \mapsto X + \frac{1}{2}(T + S(T))$ is een translatie in een richting evenwijdig met V. De transformatie $F(X) = S(X) + T$ wordt dan een *schuifspiegeling* genoemd.

In de opmerking na 8.4.4 moet "2.3.4" veranderd worden in "2.4.4".

Bladz. 226. In 8.7.8 moet staan " $\text{opp}(A'B'C'D') = |P \times Q| \cdot \text{opp}(ABCD)$ ".

Hoofdstuk 9.

Bladz. 240. Schrap de laatste zin van de opgave die volgt op 9.4.2.

Hoofdstuk 13.

Bladz. 351. Het is beter om de namen $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$ in de *Toepassing* m.b.t. de lengte van de grafiek van een grafiek te veranderen in $X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$.
[Want P_n is al in gebruik als naam van de bijbehorende partitie.]

Dan $r_n = \sum_{i=1}^{n} |X_{i-1}X_i|$.

Hoofdstuk 14.

Bladz. 381. Het is beter om $P_{i\,j} = \varphi(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ te veranderen in

$$X_{i\,j} = \varphi(x_i, y_j, f(x_i, y_j)).$$

[Want P_n wordt gebruikt als naam van de bijbehorende partitie.].